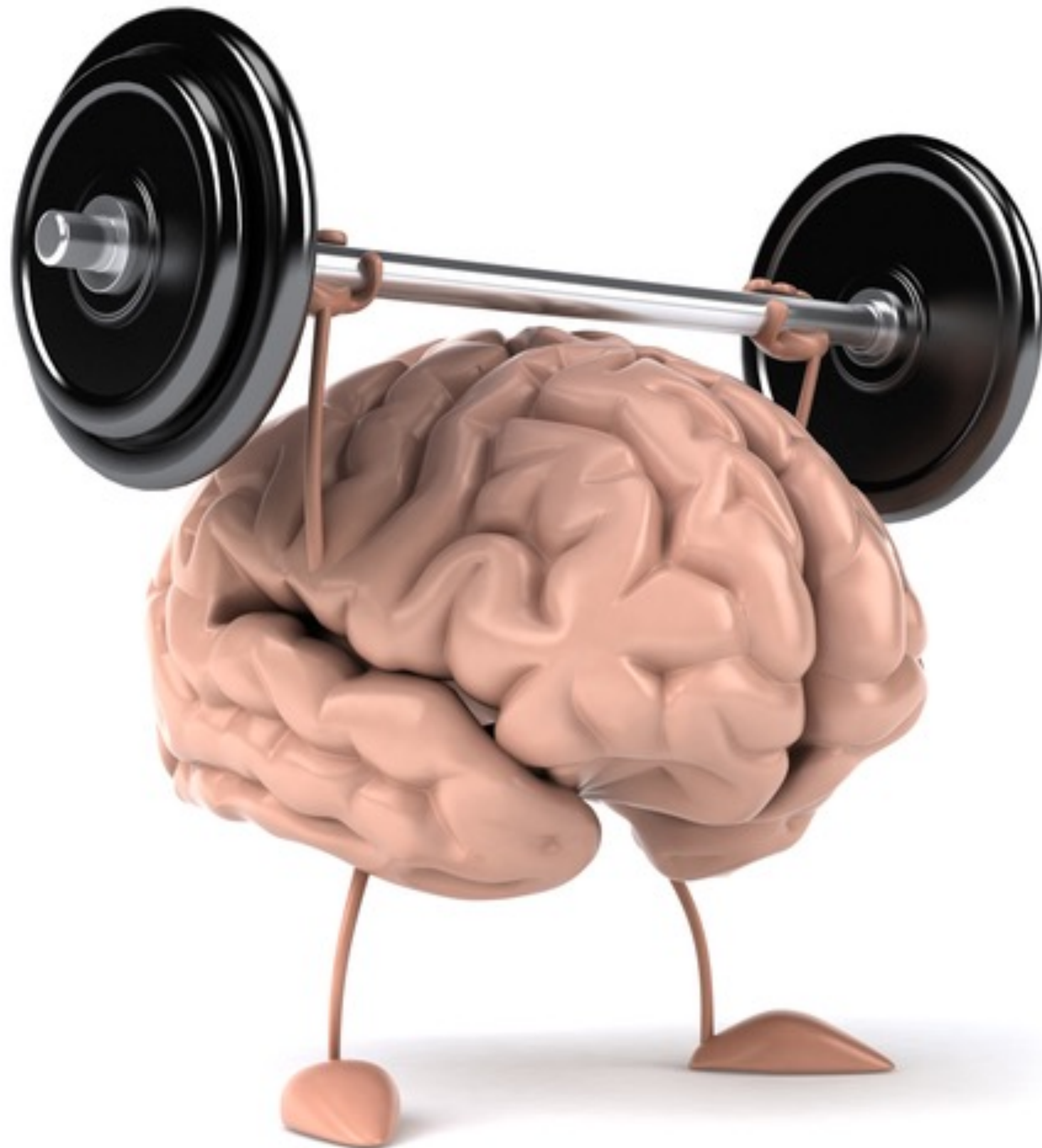


Révision

Examen final



MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Jean-François Lalonde

Stratégies avant l'examen

- Dans les jours précédant l'examen :
 - DORMIR
 - Étude :
 - devoirs, exercices faits en classe
 - examens des années précédentes — **ATTENTION!**
 - révision des notes de cours pour les modules plus difficiles
 - objectifs du cours (sur le site web)
- Dans les heures précédant l'examen :
 - Alimentation adéquate (attention au *sugar crash*)
 - Économisez votre énergie intellectuelle
 - Détente

Stratégies durant l'examen

- **Avant** de commencer :
 - Survoler l'examen et classer les questions selon leur difficulté/temps
- **Après** avoir commencé :
 - Commencer par les questions les plus faciles !
 - Bloqué.e ? Sauter la question et prenez note d'y revenir
 - Faites comme Dwight : respirez !



Stratégies après l'examen



4. Valeurs et vecteurs propres

Vecteur propre

- Un **vecteur propre** d'une matrice **A** de dimensions $n \times n$ est un vecteur non-nul tel que :

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

L'orientation de **x** n'est pas modifiée par **A** !

Calcul des valeurs et vecteurs propres

- λ est une **valeur propre** de $\mathbf{A}$ si l'équation suivante admet une solution non-triviale :

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0$$

Handwritten red annotations:
A red arrow points from "valeur propre" to λ .
A red arrow points from "vect. propre" to $\mathbf{x}$.

Problème : nous avons
2 inconnues (λ et $\mathbf{x}$)...

- Si l'espace nul n'est pas de dimension 0, cela revient à dire que la matrice $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ est **singulière**.

Handwritten red text: donc $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

Besoin d'une façon (autre que l'élimination)
de déterminer si une matrice est singulière !

Cofacteurs

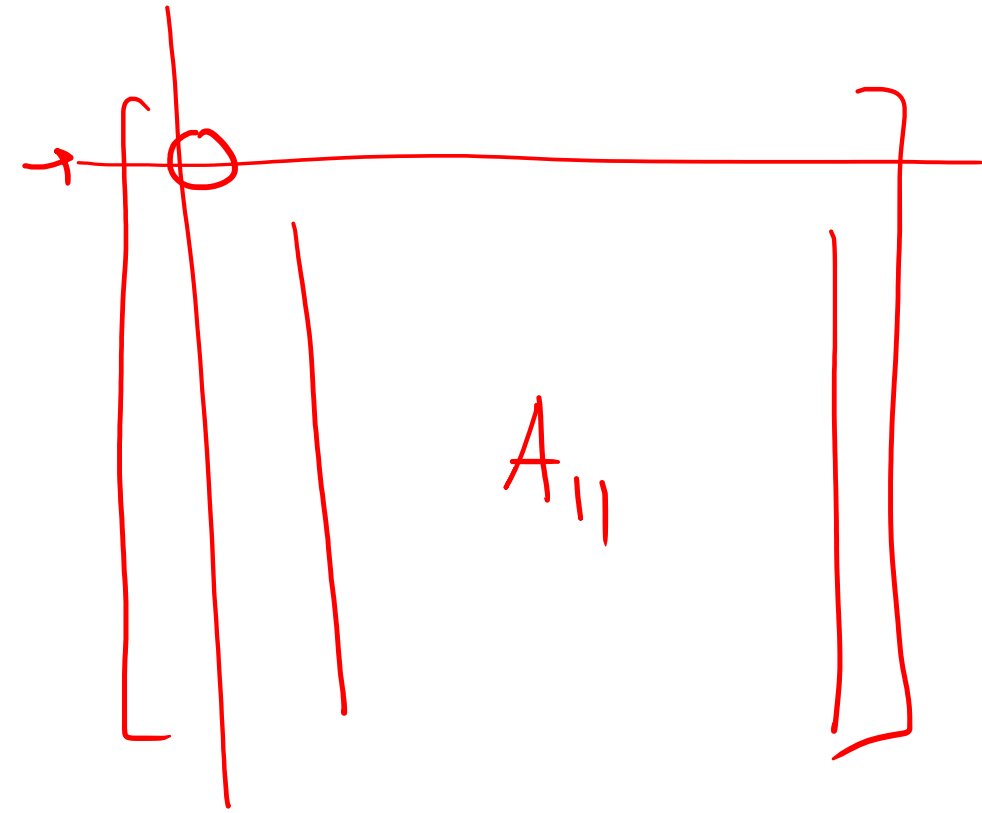
- Le cofacteur d'un élément a_{ij} d'une matrice $n \times n$ est :

$$C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det \mathbf{A}_{ij}$$

On obtient $\mathbf{A}_{ij}$ en retirant la ligne i et la colonne j de $\mathbf{A}$

Expansion de cofacteurs de Laplace

- Le déterminant d'une matrice $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ est donné par



$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{i1}\mathbf{C}_{i1} + a_{i2}\mathbf{C}_{i2} + \dots + a_{in}\mathbf{C}_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathbf{C}_{ij} \end{aligned}$$

pour n'importe quelle
ligne

- ou :

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{1j}\mathbf{C}_{1j} + a_{2j}\mathbf{C}_{2j} + \dots + a_{nj}\mathbf{C}_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{C}_{ij} \end{aligned}$$

pour n'importe quelle
colonne

Signe du cofacteur ?

$$C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det A_{ij}$$

- $(i + j)$ pair ou impair ?

- Truc :

$$C_{32} = - |A_{32}|$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Résumé

Les valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$ sont les solutions de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $|A - \lambda I| = 0$
2. Déterminer les valeurs propres en trouvant les racines du polynôme
3. Pour chaque valeur propre λ_i :
 1. Calculer une base pour l'espace nul de la matrice $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$ $\rightarrow (A - \lambda_i I) \vec{x} = 0$
trouver le (ou les) $\vec{x}$
 2. Les vecteurs formant cette base sont les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à λ_i

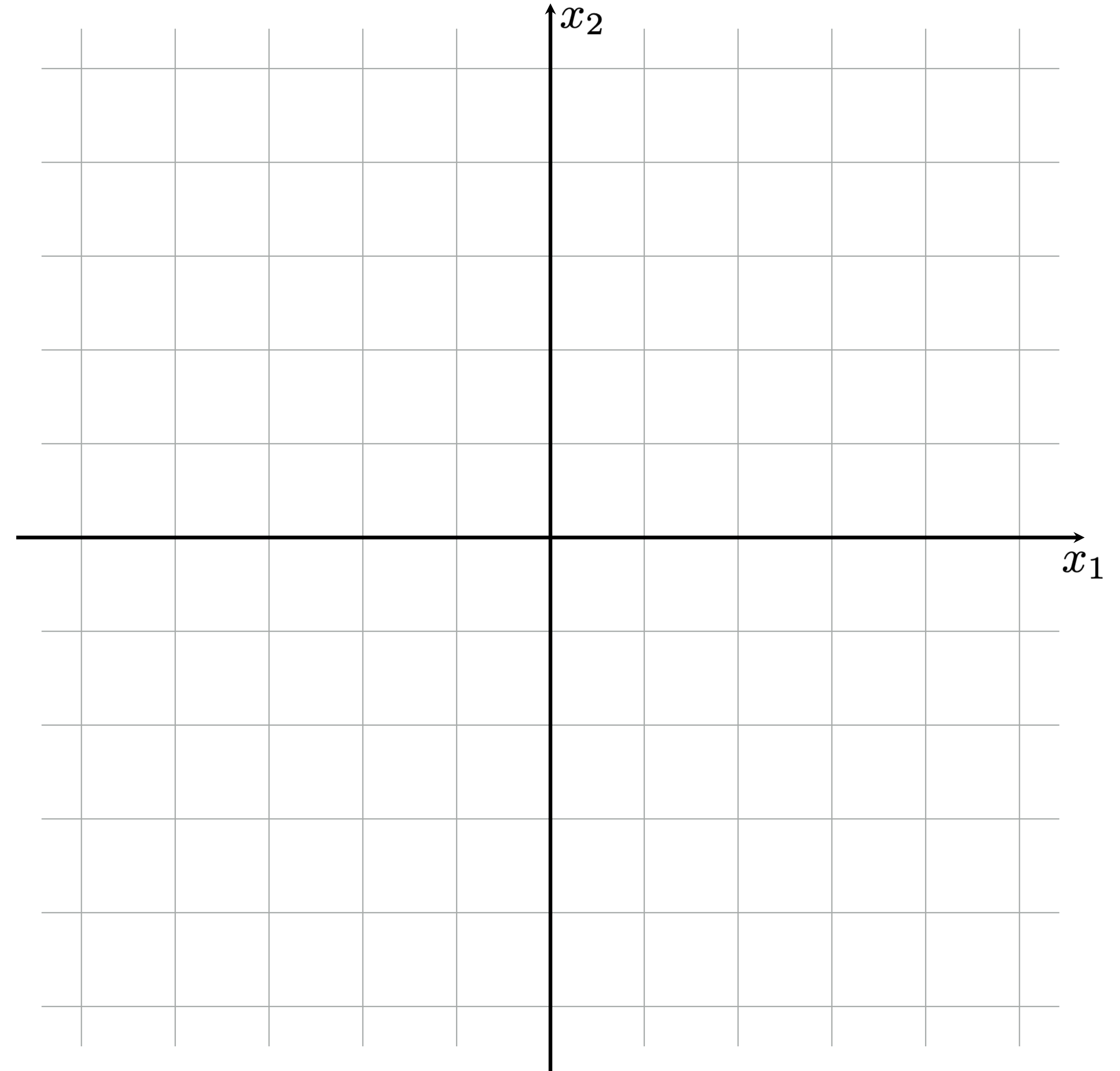
5. Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux (ou perpendiculaires)

- Deux vecteurs sont orthogonaux si :

$$u^T v = 0$$

- Le vecteur **0** est orthogonal à n'importe quel autre vecteur



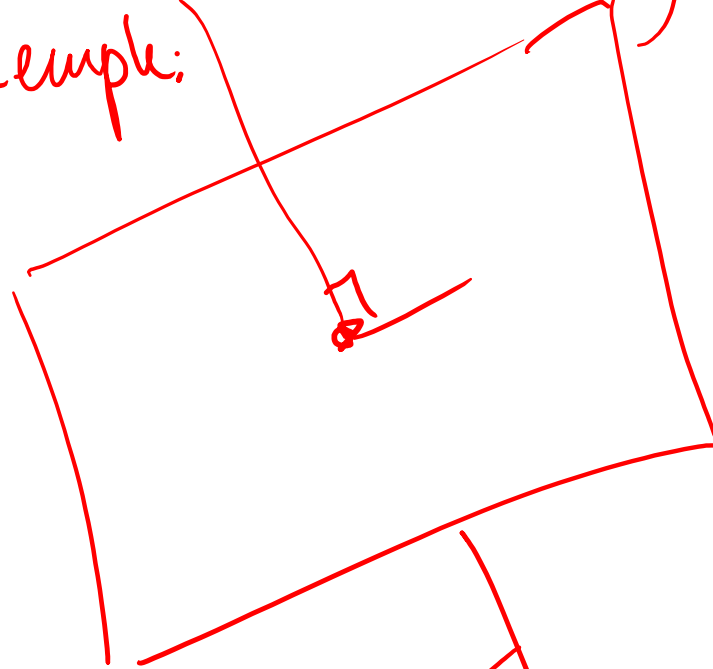
Sous-espaces d'une matrice

dans $\mathbb{R}^n$

Espace des lignes (r dimensions)

si $n = 3$

par exemple:



Espace nul ($n-r$ dimensions)

compléments
orthogonaux

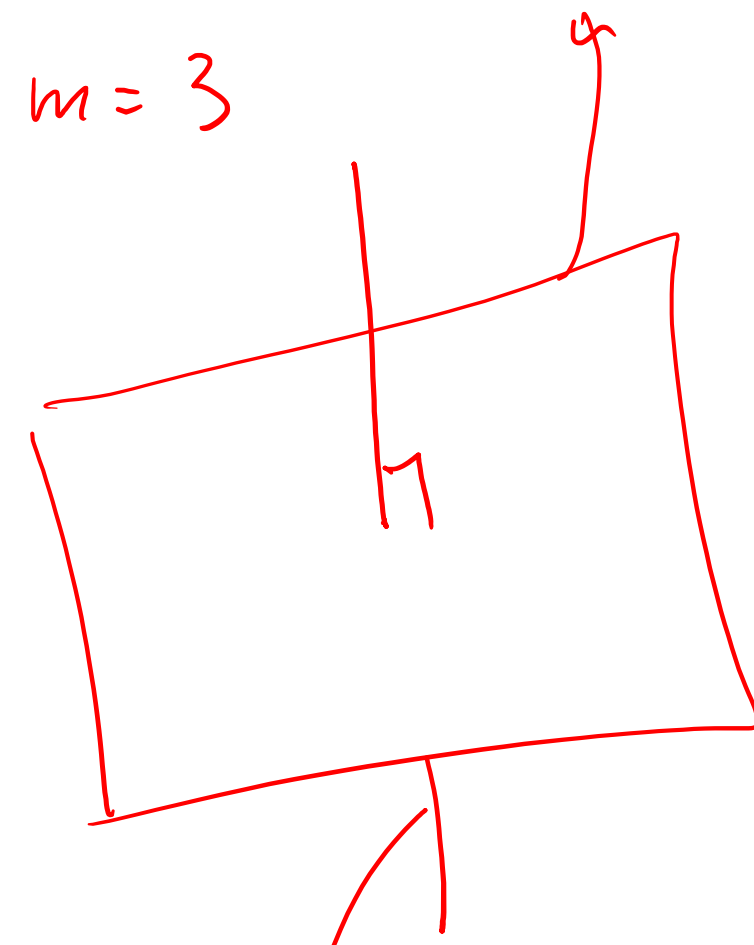
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & n \\ & \\ & \\ m \end{bmatrix} \quad \text{rang}(\mathbf{A}) = r$$

dans $\mathbb{R}^m$

Espace des colonnes (r dims)

si $m = 3$

par exemple:



Espace nul de $\mathbf{A}^T$ ($m-r$ dims)

compléments
orthogonaux

Théorème de la décomposition orthogonale

Soit $\mathcal{W}$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{z}$$

où $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{W}$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^\perp$. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{W}$, alors

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}}{\underbrace{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}_{\text{premier vecteur}}} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\mathbf{u}_p^\top \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p$$

si $\mathcal{U}$ orthonormal

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\top \mathbf{v}$$

Objectif

- Soit un sous-espace $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$ donné par une base

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}$$

- La méthode de Gram-Schmidt permet de trouver une base orthogonale (et même orthonormale) du même sous-espace $\mathcal{W}$

$$\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_p\}$$

Cas à deux vecteurs

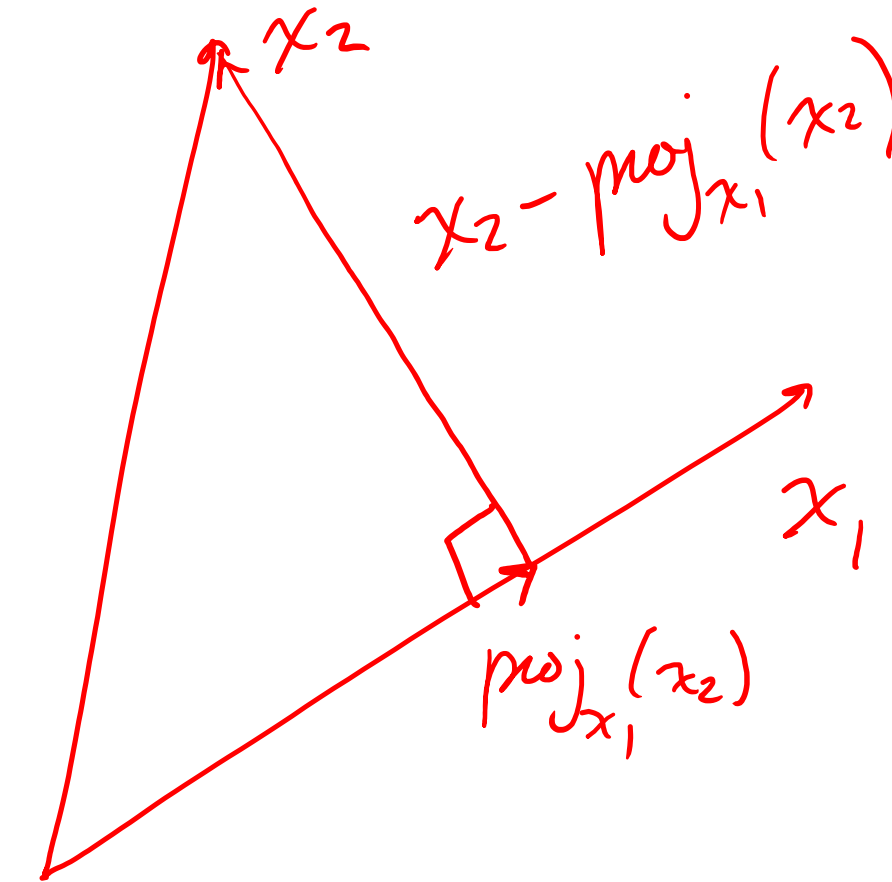
- Commençons par un sous-espace $\mathcal{W}$ à 2 dimensions

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$$

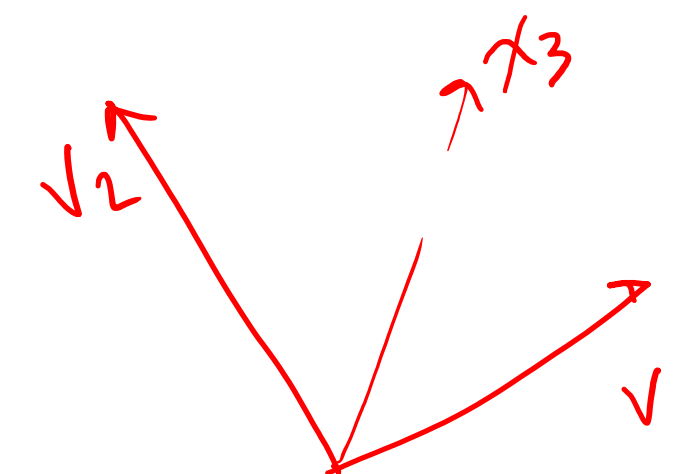
- On obtient

$$\boxed{\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2^\top \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

- Sont-ils bien orthogonaux ?



à 3 vecteurs:



Factorisation QR

après Gram-Schmidt
↓
 $A = QR$

On sait comment calculer **Q**. Comment obtenir **R** ?

$$R = Q^T A$$

triangulaire sup.

$$R = \begin{bmatrix} \triangle \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rappel

Q est une matrice orthonormale

6. Distance et approximation

Moindres carrés

Quand A est rectangulaire, système inconsistant

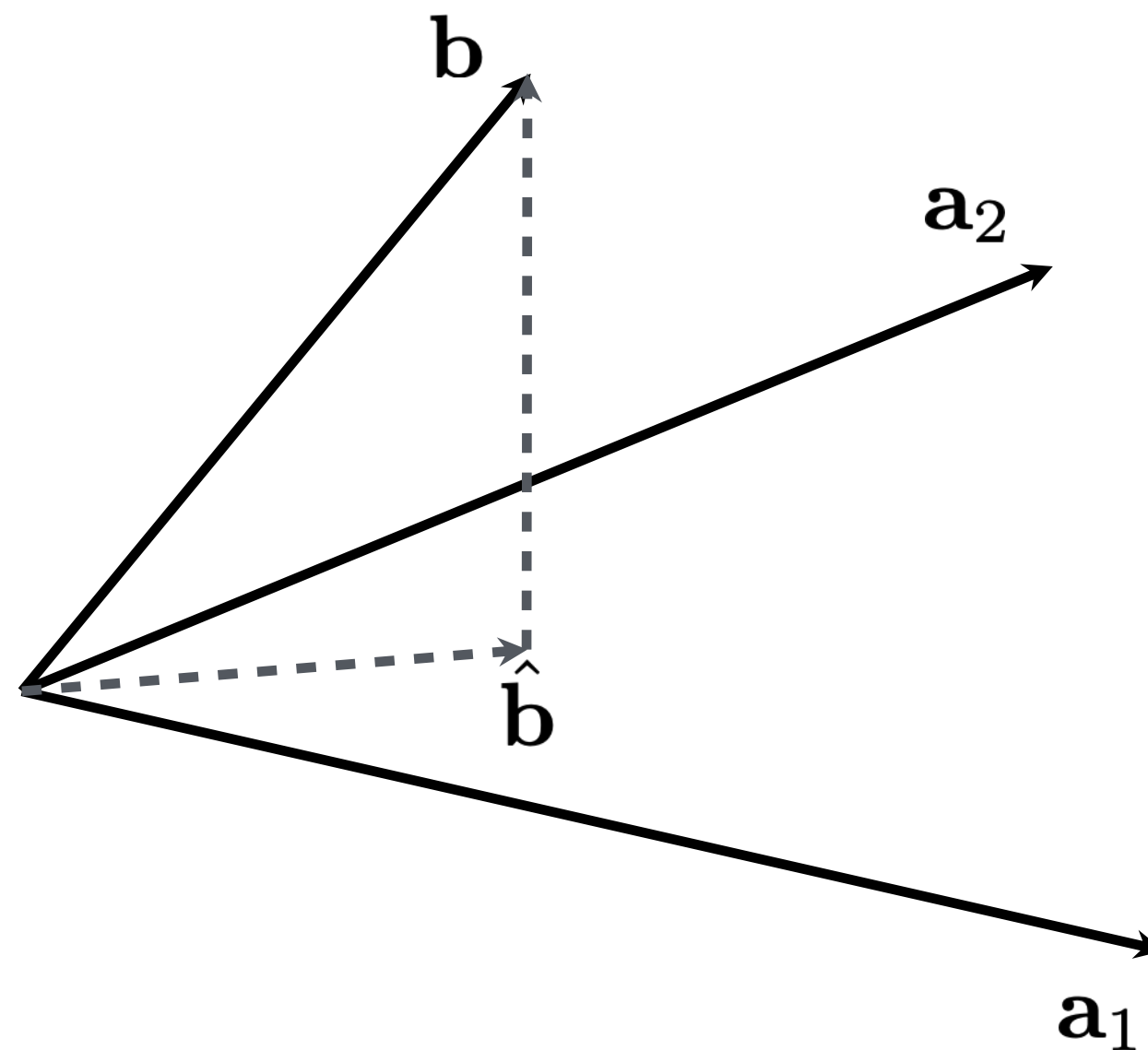
On nomme la solution à l'équation

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

$A' \hat{x} = b'$

la solution aux moindres carrés
car c'est elle qui minimise l'erreur quadratique moyenne

On nomme cette équation
l'équation normale



$$\epsilon = ||\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}||$$

$\rightarrow ||b - \hat{b}|| = ||b - A\hat{x}||$

Inversibilité

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

C'est la matrice pseudo-inverse

Si les colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes, alors $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ est inversible.

Preuve ? Commençons avec $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La décomposition en valeurs singulières

(*Singular Value Decomposition*, ou SVD)

La SVD permet de factoriser n'importe quelle matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

Diagram illustrating the SVD decomposition $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ with dimensions and components:

- $\mathbf{U}$ (size $m \times m$):
 - Columns $u_1, u_2, \dots, u_r$ are labeled "esp. colonnes".
 - Columns $u_{r+1}, \dots, u_m$ are labeled "esp. nul de A^T ".
- $\mathbf{\Sigma}$ (size $m \times n$):
 - Diagonal elements are $\sigma_1, \dots, \sigma_r$.
 - Other elements are 0.
- $\mathbf{V}^T$ (size $n \times n$):
 - Rows $v_1, v_2, \dots, v_r$ are labeled "esp. lignes".
 - Rows $v_{r+1}, \dots, v_n$ are labeled "esp. nul".